Operaciones en el Espacio de Señales: Convolución de Señales (versión 1) PS2315

Prof. José Ferrer   Dpto. Procesos y Sistemas
Universidad Simón Bolívar

Abril-Julio 2012

Abstract

En esta nota definimos la convolución generalizada de señales, sus propiedades más importantes y presentamos varios ejemplos de esta operacion binaria sobre S_e para los casos de señales de tiempo continuo como de tiempo discreto.

1 Operación de Convolución de Señales

DEFINICION 1 *Sea T un eje de tiempo generalizado Y K un cuerpo de números sobre el cual no imponemos restricciones por ahora mas alla de ser fijo pero arbitrario. Denote por $S_e = S_e(T, K)$ al conjunto de señales*

$$f : T \to K$$

Dadas dos señales $f\,, g \in S_e$, se define como convolución de f y g a una señal h denotada por $h = f * g$, mediante

$$h(\lambda) = \oint_{\tau \in T} f(\tau)\, h(\lambda - \tau)\, \mu(\tau)$$

para cada $\lambda \in T$.

Recuerde que la suma generalizada $\oint_{\tau \in T} [.]\, \mu(\tau)$ se define como

$$\oint_{\tau \in T} [.]\, \mu(\tau) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} [.]\, dt, & \lambda = t, \\ \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} [.]\, \mu(k)\,, & \lambda = k \end{cases} \tag{1}$$

y

$$\mu\left(k\right)=\begin{cases}+1, & k\in T\\ -1, & k\in T^{inv}\end{cases}$$

donde

$$T^{inv}=inv\left(T\right)$$

Por lo tanto, si

$$T=\left[k_1,k_2\right]=\left\{k_1,k_1+1,k_1+2,\cdots,k_2-1,k_2\right\}$$

con $k_1\leq k_2$, entonces T^{inv} es el conjunto ordenado

$$T^{inv}=\left\{k_2,k_2-1,k_2-2,\cdots,k_1-1,k_1\right\}$$

Las propiedades más importantes de la suma generalizada son:

1. Linealidad Para todas $f,g\in S_e$, y para todos $\alpha,\beta\in K$, se tiene que

$$\oint_{\tau\in T}\left[\alpha f\left(\tau\right)+\beta g\left(\tau\right)\right]\mu\left(\tau\right)=\alpha\oint_{\tau\in T}f\left(\tau\right)\mu\left(\tau\right)+\beta\oint_{\tau\in T}g\left(\tau\right)\mu\left(\tau\right)$$

2. Reversibilidad Para toda $f\in S_e$ y para todo $\left[\lambda_1,\lambda_2\right]\subset T$ con $\lambda_1\leq\lambda_2$, se tiene que

$$\oint_{\tau\in T}f\left(\tau\right)\mu\left(\tau\right)=-\oint_{\tau\in T^{inv}}f\left(\tau\right)\mu\left(\tau\right)$$

3. No negatividad Si la señal f es no negativa; o sea, $f\left(\lambda\right)\geq 0,\lambda\in T$, entonces

$$\oint_{\tau\in T}f\left(\tau\right)\mu\left(\tau\right)\geq 0$$

Para las señales sencillas y prácticas como las que encontramos en ingeniería esta propiedad se deduce fácilemente de la definicición (1) y de las propiedades de la integral de Riemman y de la sumatoria discreta.

De esta propiedad se desprende inmediatamente que si $f,g\in S_e$ son señales tales que para todo $\lambda\in T,f\left(\lambda\right)\geq g\left(\lambda\right)$ se tiene

$$\oint_{\tau\in T}f\left(\tau\right)\mu\left(\tau\right)\geq\oint_{\tau\in T}g\left(\tau\right)\mu\left(\tau\right)$$

de manera que si se cumple

$$m\leq f\left(\lambda\right)\leq M,\lambda\in T,$$

entonces para todo intervalo $T_1 = [\lambda_1, \lambda_2] \subset T$

$$m.\mu(L_1) \le \oint_{\tau\in T_1} f(\tau)\,\mu(\tau) \le M.\mu(L_1)$$

Solo basta observar que

$$\oint_{\tau\in T_1} 1.\mu(\tau) = \mu(L_1)$$

donde $\mu(L_1)$ es la medida de L_1 (la longitud de L_1):

$$\mu(L_1) = \begin{cases} t_2 - t_1, & \lambda = t \\ k_2 - k_1 + 1, & \lambda = k. \end{cases}$$

4. Mayorización (Esta propiedad será de utilidad cuando estudiemos el concepto de estabilidad de sistemas): Sea $T_1 \subset T$, $\phi \in S_e$ una señal tal que

$$\oint_{\tau\in T_1} \phi(\tau).\mu(\tau) \le \infty$$

entonces toda señal $f \in S_e$ mayorizada por ϕ (o sea, $f(\lambda) \le \phi(\lambda), \lambda \in T_1$) se tiene

$$\oint_{\tau\in T_1} f(\tau)\,\mu(\tau) < \infty.$$

Hasta ahora hemos enunciado propiedades de la suma generalizada $\oint_{\tau\in T} [.]\,\mu(\tau)$ sobre un conjunto $T_1 \subset T$, fijo, de medida finita pero arbitrario. Ahora establecemos una serie de propeidades de la suma generalizada considerando la función

$$F(T_1) = \oint_{\tau\in T_1} f(\tau)\,\mu(\tau)$$

donde $f \in S_e$ es fija y arbitraria siempre y cuando $\oint_{\tau\in T_1} f(\tau)\,\mu(\tau)$ exista para cada T_1 considerado.

TEOREMA 2 *Si $T^0 = \cup_{i=1}^N T_i$, con $T_i \subset T$, y $T_i \cap T_j = \varnothing$ si $i \neq j$, entonces*

$$\oint_{\tau\in T^0} f(\tau)\,\mu(\tau) = \oint_{\tau\in \cup_{i=1}^N T_i} f(\tau)\,\mu(\tau) = \sum_{i=1}^{N} \oint_{\tau\in T_i} f(\tau)\,\mu(\tau)$$

donde la existencia de la suma generalizada del miembro izquierdo implica la existencia de las sumas generalizadas y la convergencia absoluta de la suma de la derecha (la cual puede tener infinitos términos)

Este teorema lo que nos dice es que la sumabilidad generalizada de la señal f sobre un conjunto de tiempo $T^0 = \cup_{i=1}^{N} T_i$, donde $T_i \cap T_j = \varnothing$ (N puede ser infinito) implica que f sea sumable (en el sentido generalizado) en cada subintervalo de tiempo T_i, y que la suma generalizada de f sobre T^0 es igual a la suma de las sumas generalizadas de f sobre los intervalos de tiempo T_i.

TEOREMA 3 *Si* $T^0 = \cup_{i=1}^{N} T_i$, *con* $T_i \subset T$, *y* $T_i \cap T_j = \varnothing$ *si* $i \neq j$ *y la suma*

$$S = \sum_{i=1}^{N} \oint_{\tau \in T_i} |f(\tau)| \, \mu(\tau)$$

converge (o sea, $S < \infty$*), entonces la suma generalizada de* f *sobre* T^0 *existe y*

$$\oint_{\tau \in T^0} f(\tau) \, \mu(\tau) = \sum_{i=1}^{N} \oint_{\tau \in T_i} |f(\tau)| \, \mu(\tau)$$

Lo nuevo aquí, en comparación con el teorema anterior, es la aseveración de que la convergencia de la serie o suma $\sum_{i=1}^{N} \oint_{\tau \in T_i} |f(\tau)| \, \mu(\tau)$ (convergencia absoluta) implica la suma generalizada de f en T^0.

TEOREMA 4 *(Fubini) Sea* f *una señal de dos variables de tiempo, o sea,*

$$f : T^1 \times T^2 \to K$$

o sea

$$f(\lambda) = f(\lambda_1, \lambda_2)$$

donde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in T = T^1 \times T^2$, *y defina* $\mu(\lambda) = (\mu(\lambda_1), \mu(\lambda_2))$ *entonces si la suma generalizada de la señal* f

$$\oint_{\tau \in T} f(\tau) \, \mu(\tau) = \oint_{\tau \in T} f(\tau_1, \tau_2) \, \mu(\tau)$$

existe, entonces

$$\begin{aligned} \oint_{\tau \in T} f(\tau_1, \tau_2) \, \mu(\tau) &= \oint_{\tau_1 \in T^1} \left\{ \oint_{\tau_2 \in T_{\tau_1}} f(\tau_1, \tau_2) \, \mu(\tau_2) \right\} \mu(\tau_1) \qquad (2) \\ &= \oint_{\tau_2 \in T^2} \left\{ \oint_{\tau_1 \in T_{\tau_2}} f(\tau_1, \tau_2) \, \mu(\tau_1) \right\} \mu(\tau_2) \end{aligned}$$

donde para cada $\tau_1 \in T^1$:

$$T_{\tau_1} = \left\{\tau_2 \in T^2 : (\tau_1, \tau_2) \in T = T^1 \times T^2\right\}$$

y para $\tau_2 \in T^2$:

$$T_{\tau_2} = \left\{\tau_1 \in T^1 : (\tau_1, \tau_2) \in T = T^1 \times T^2\right\}$$

La afirmación del teorema de Fubini es el resultado fundamental para sumas generalizadas múltiples e incluye la existencia de las susmas generalizadas de las llaves para casi todas las variables respecto a las cuales se toman las sumas generalizadas.

Es importante notar que la existencia de las sumas reiteradas (generalizadas):

$$\oint_{\tau_1 \in T^1} \left\{ \oint_{\tau_2 \in T_{\tau_1}} f(\tau_1, \tau_2)\, \mu(\tau_2) \right\} \mu(\tau_1), \quad \text{y,} \quad \oint_{\tau_2 \in T^2} \left\{ \oint_{\tau_1 \in T_{\tau_2}} f(\tau_1, \tau_2)\, \mu(\tau_1) \right\} \mu(\tau_2)$$

no implican, en el caso general, ni la igualdad (2) ni la existencia de la suma generalizada de f sobre $T = T^1 \times T^2$. Sin embargo, de existir al menos una de las siguientes sumas generalizadas

$$\oint_{\tau_1 \in T^1} \left\{ \oint_{\tau_2 \in T_{\tau_1}} |f(\tau_1, \tau_2)|\, \mu(\tau_2) \right\} \mu(\tau_1), \quad \text{o,} \quad \oint_{\tau_2 \in T^2} \left\{ \oint_{\tau_1 \in T_{\tau_2}} |f(\tau_1, \tau_2)|\, \mu(\tau_1) \right\} \mu(\tau_2)$$

entonces f es sumable sobre $T = T^1 \times T^2$ y la igualdad (2) se cumple.

Veamos unos ejemplos de señales, para las cuales las sumas reiteradas (generalizadas) existen, pero no se cumple la igualdad (2). Ilustraremos este contraejemplo con una señal definida sobre el producto de dos ejes de tiempo continuo.

EJEMPLO 5 *Sea* $T = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset R^2$ *y defina la señal*

$$f(t_1, t_2) = \frac{t_1 t_2}{\left(t_1^2 + t_2^2\right)^2}$$

entonces, para $t_2 \neq 0$

$$\int_{-1}^{1} \frac{t_1 t_2}{\left(t_1^2 + t_2^2\right)^2} dt_1 = 0$$

y para $t_1 \neq 0$

$$\int_{-1}^{1} \frac{t_1 t_2}{\left(t_1^2 + t_2^2\right)^2} dt_2 = 0$$

Por lo tanto

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} \frac{t_1 t_2}{\left(t_1^2 + t_2^2\right)^2} dt_2 \right) dt_1 = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} \frac{t_1 t_2}{\left(t_1^2 + t_2^2\right)^2} dt_1 \right) dt_2 = 0$$

pero la integral

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{t_1t_2}{\left(t_1^2+t_2^2\right)^2}dt_1dt_2$$

no existe ya que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left|f\left(t_1,t_2\right)\right|dt_1dt_2 &\geq \int_0^1 dr\int_0^{2\pi}\frac{\left|\sin\varphi\cos\varphi\right|}{r}d\varphi = 2\int_0^1\frac{dr}{r}\\ &\geq 2\ln\left(r\right)\Big|_{r=0}^{1}=\infty\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 *Nuevamente* $T=[-1,1]\times[-1,1]\subset R^2$ *y la señal (algo laboriosa y poco probable que encontremos en la práctica una de este tipo, pero hay que respetar la formalidad):*

$$f\left(t_1,t_2\right)=\begin{cases}2^n, & \frac{1}{2^n}\leq t_1\leq\frac{1}{2^{n-1}} \quad y \quad \frac{1}{2^n}\leq t_2\leq\frac{1}{2^{n-1}}\\ -2^{n+1}, & \frac{1}{2^{n+1}}\leq t_1\leq\frac{1}{2^n} \quad y \quad \frac{1}{2^n}\leq t_2\leq\frac{1}{2^{n-1}}\\ 0, & en\ todas \quad las \quad demás\end{cases}$$

Entonces se puede calcular

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f\left(t_1,t_2\right)d\tau_1\right)dt_2=0$$

mientras que

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f\left(t_1,t_2\right)d\tau_2\right)dt_1=\frac{1}{4}$$

Ahora procederemos a ilustrar tan impportante concepto como es el de convolución de dos señales. En primer lugar, mostraremso cómo calcular mualmente la convolucción de dos señales en ejes de tiempo de la misma naturaleza.

1.1 Propiedades de la Convolución

1. Conmutatividad Dadas dos señales $f,g\in S_e$, entonces

$$f*g=g*f$$

La conmutatividad de la convolución generalizada puede demostrarse empezando con la definición de convolución

$$\left[f*g\right]\left(\lambda\right)=\oint_{\tau\in T}f\left(\tau\right)g\left(\lambda-\tau\right)\mu\left(\tau\right)$$

para cada $\lambda\in T$. Ahora defina $\omega=\lambda-\tau$ donde τ es la variable que rigue la suma generalizada. Por lo tanto,

$$\tau=\lambda-\omega$$

y se tiene las siguientes implicaciones

$$\begin{aligned}\mu(\tau) &= -\mu(\omega) \\ \text{Si } \tau &= -\infty \Rightarrow \omega = +\infty \\ \text{Si } \tau &= +\infty \Rightarrow \omega = -\infty\end{aligned}$$

y se tiene que

$$\begin{aligned}[f*g](\lambda) &= \oint_{\tau\in T} f(\tau)\, g(\lambda-\tau)\, \mu(\tau) = \oint_{\tau\in T^{inv}} f(\lambda-\omega)\, g(\omega)\, [-\mu(\omega)] \\ &= -\oint_{\omega\in T} f(\lambda-\omega)\, g(\omega)\, [-\mu(\omega)] \\ &= \oint_{\omega\in T} f(\lambda-\omega)\, g(\omega)\, \mu(\omega) = \oint_{\omega\in T} g(\omega)\, f(\lambda-\omega)\, \mu(\omega) \\ &= [g*f](\lambda)\end{aligned}$$

empleando la propiedad de reversabilidad de la suma generalizada.

2. **Asociatividad** Sean $f, g, h \in S_e$ y considere la siguiente expresión

$$\begin{aligned}[f*(g*h)](\lambda) &= \oint_{\tau\in T} f(\lambda-\tau)\, [g*h](\tau)\, \mu(\tau) \\ &= \oint_{\tau\in T} f(\lambda-\tau) \left\{ \oint_{\zeta\in T} g(\tau-\zeta)\, h(\zeta)\, \mu(\zeta) \right\} \mu(\tau)\end{aligned}$$

y aplicando el teorema de Fubini ya que suponemos la existencia de la suma generalizada del lado derecho de la igualdad

$$[f*(g*h)](\lambda) = \oint_{\zeta\in T} \left\{ \oint_{\tau\in T} f(\lambda-\tau)\, g(\tau-\zeta)\, \mu(\tau) \right\} h(\zeta)\, \mu(\zeta)$$

pero basta observar que

$$[f*g](\zeta) = \oint_{\tau\in T} f(\zeta-\tau)\, g(\tau)\, \mu(\tau)$$

y por lo tanto

$$[f*g](\lambda-\zeta) = \oint_{\omega\in T} f(\lambda-\zeta-\omega)\, g(\omega)\, \mu(\omega)$$

Ahora defina $\omega = \tau - \zeta$, por lo que $\tau = \omega + \zeta$, y de inmediato vemos

$$\begin{aligned}
[f * g](\lambda - \zeta) &= \oint_{\tau \in T} f(\lambda - \zeta - \tau + \zeta)\, g(\tau - \zeta)\, \mu(\tau) \\
&= \oint_{\tau \in T} f(\lambda - \tau)\, g(\tau - \zeta)\, \mu(\tau)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
[f * (g * h)](\lambda) &= \oint_{\zeta \in T} \underbrace{\left\{ \oint_{\tau \in T} f(\lambda - \tau)\, g(\tau - \zeta)\, \mu(\tau) \right\}}_{[f*g](\lambda-\zeta)} h(\zeta)\, \mu(\zeta) \\
&= [(f * g) * h](\lambda)
\end{aligned}$$

Demostrándose de esta manera la propiedad asociativa

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

3. **Distributividad** Sean $f, g, h \in S_e$ y para cada $\lambda \in T$, considere

$$\begin{aligned}
[f * (g + h)](\lambda) &= \oint_{\tau \in T} f(\lambda - \tau)\, [g + h](\tau)\, \mu(\tau) \\
&= \oint_{\tau \in T} f(\lambda - \tau)\, [g(\tau) + h(\tau)]\, \mu(\tau) \\
&= \oint_{\tau \in T} f(\lambda - \tau)\, g(\tau)\, \mu(\tau) + \oint_{\tau \in T} f(\lambda - \tau)\, h(\tau)\, \mu(\tau) \\
&= [f * g](\lambda) + [f * h](\lambda) \\
&= [f * g + f * h](\lambda)
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

4. **Elemento Identidad** Recuerde que la definición de una señal delta generalizada $\delta \in S_e = S_e(T, K)$ que hemos adoptado es aquella que se centra en la actuación o conducta de δ con un subconjunto de señales $\phi \in S_e$ (denominadas señales de prueba),$\phi \in \Omega_{test} \subset S_e$, y:

$$\langle \phi . \delta \rangle = \oint_{\tau \in T} \phi(\tau)\, \delta(\tau - \lambda_0)\, \mu(\tau) = \phi(\lambda_0)$$

donde debemos estar claros que $\delta(\lambda-\lambda_0)$ com $\lambda_0 \in T$, arbitrario pero fijo, es un impulso que ocurre en λ_0.

Por lo tanto, si $\Omega_{test} = S_e$ y $f \in S_e$, entonces

$$[f*\delta](\lambda) = \oint_{\tau\in T} f(\tau)\,\delta(\lambda-\tau)\,\mu(\tau) = f(\lambda)$$

En consecuencia, para toda $f \in S_e$ se tiene $f*\delta = f$, o sea, δ es elemento identidad con respecto a la "multiplicación=convolución" de señales sobre S_e.

5. Propiedad de Escalamiento Temporal Sea $a \in R$ y T una base, escala o eje de tiempo tal que:

$$\forall\lambda \in T, a\lambda \in T$$

O sea T es "cerrado con respecto al escalamiento" de la variable "temporal" $\lambda \in T$.

Dada una señal $f \in S_e$, entonces la señal f escalada en a unidades temporales se define por

$$f^{esc}(\lambda) = f(a\lambda), \lambda \in T.$$

Seleccionen dos señales $f, g \in S$ y denote por h la convolución de f y g, esto es,

$$h(\lambda) = [f*g](\lambda) = \oint_{\tau\in T} f(\tau)\,g(\lambda-\tau)\,\mu(\tau)$$

y por w la convolicion de las señales escaladas f^{esc} y g^{esc} por $a \in R$, unidades de tiempò. Esto es

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= (f^{esc}*g^{esc})(\lambda) \\ &= f^{esc}(\lambda)*g^{esc}(\lambda) \\ &= f(a\lambda)*g(a\lambda) \\ &= \oint_{\tau\in T} f(a\tau)\,g(a\lambda-a\tau)\,\mu(\tau) = \oint_{\tau\in T} f(a\tau)\,g[a(\lambda-\tau)]\,\mu(\tau) \end{aligned}$$

Suponga $a > 0$, y defina $\zeta = a\tau$.Entonces, $\tau = \frac{\zeta}{a}$ y : a) si $\tau = -\infty$, entonces $\zeta = -\infty$, b) si $\tau = +\infty$, entonces $\zeta = +\infty$, y $\mu(\tau) = \frac{1}{a}\mu(\zeta)$. En consecuencia

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= \oint_{a\tau\in T} f(a\tau)\,g[a(\lambda-\tau)]\,\mu(\tau) \\ &= \oint_{\zeta\in T} f(\zeta)\,g[a\lambda-\zeta]\,\frac{1}{a}\mu(\zeta) \\ &= \frac{1}{a}\oint_{\zeta\in T} f(\zeta)\,g(a\lambda-\zeta)\,\mu(\zeta) \end{aligned}$$

y ya que

$$h(\lambda) = [f * g](\lambda) = \oint_{\tau \in T} f(\tau)\, g(\lambda - \tau)\, \mu(\tau)$$

se concluye que

$$w(\lambda) = f(a\lambda) * g(a\lambda) = \frac{1}{a} h(a\lambda)$$

Precediendo de similar manera cuando $a > 0$, se obtiene que

$$-\frac{1}{a} h(a\lambda) = f(a\lambda) * g(a\lambda)$$

Por lo tanto, en general, si $h = f * g$, entonces

$$h^{esc} = |a| \left[f^{esc} * g^{esc} \right]$$

6. **Propiedad de Diferenciación Generalizada** Recuerde que dada una señal $f \in S_e = S_e(T.K)$, entonces definimos el operador σ de "diferenciación generalizada" mediante

$$[\sigma f](\lambda) = \begin{cases} \frac{d}{dt} f(t), & \lambda = t, \\ [qf](k) = f(k+1), & \lambda = k. \end{cases}$$

Por lo tanto, si dadas dos señales $f, g \in S_e$ y $h = f * g$, o sea, para cada $\lambda \in T$:

$$h(\lambda) = \oint_{\tau \in T} f(\tau)\, g(\lambda - \tau)\, \mu(\tau)$$

entonces

$$\begin{aligned} [\sigma h](\lambda) &= \sigma \left\{ \oint_{\tau \in T} f(\tau)\, g(\lambda - \tau)\, \mu(\tau) \right\} \\ &= \oint_{\tau \in T} f(\tau)\, \sigma[g(\lambda - \tau)]\, \mu(\tau) \\ &= [f * (\sigma g)](\lambda) \end{aligned}$$

Y recordando la propiedad conmutativa de la convolución, se tiene finalmente

$$\begin{aligned} \sigma h &= \sigma[f * g] \\ &= f * (\sigma g) \\ &= \sigma f * g \end{aligned}$$

7. Propiedad de la Suma Generalizada Dada una señal $h \in S_e$, entonces el operador suma generalizada de h se define como

$$\left[\sigma^{-1}h\right](\lambda) = \oint_{\tau\in(-\infty,\lambda]} h(\tau)\,\mu(\tau)$$

y por lo tanto

$$\left[\sigma^{-1}h\right](\lambda) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\tau} h(\tau)\,d\tau, & \lambda = t, \\ \sum_{\tau=-\infty}^{\kappa} h(\tau)\,, & \lambda = k. \end{cases}$$

Suponga ahora que para un par de señales $f, g \in S_e$, $h = f * g$, entonces para todo $\lambda \in T$:

$$\begin{aligned} \left[\sigma^{-1}h\right](\lambda) &= \sigma^{-1}\left\{\oint_{\tau\in T} f(\tau)\,g(\lambda-\tau)\,\mu(\tau)\right\} \\ &= \oint_{\tau\in T} f(\tau)\,\sigma^{-1}\left[g(\lambda-\tau)\right]\mu(\tau) \\ &= \left[f * \sigma^{-1}g\right](\lambda) = \left[\sigma^{-1}f * g\right](\lambda) \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\sigma^{-1}(f * g) = f * \sigma^{-1}g = \sigma^{-1}f * g$$

COROLARIO 7 *Propiedad del Area Generalizada*

Dada una señal $h \in S_e$, el area generalizada de h, A_h, se define como

$$A_h = \oint_{\tau\in T} h(\tau)\,\mu(\tau)$$

O sea,

$$A_h = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,d\tau, & \lambda = t, \\ \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)\,, & \lambda = k. \end{cases}$$

Entonces, si $h = f * g$ donde $f, g \in S_e$

$$A_h = A_f . A_g$$

DEMOSTRACION. *Debido a la propiedad de suma generalizada, para todo $\lambda \in T$*

$$\left[\sigma^{-1}h\right](\lambda) = \oint_{\tau\in(-\infty,\lambda]} h(\tau)\,\mu(\tau) = \oint_{\tau\in(-\infty,\lambda]} f(\tau)\,\sigma^{-1}\left[g(\lambda-\tau)\right]\mu(\tau)$$

En particular

$$
\begin{aligned}
A_h &= \lim_{\lambda\to\infty}\left[\sigma^{-1}h\right](\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty}\oint\limits_{\tau\in(-\infty,\lambda]} h(\tau)\,\mu(\tau) \\
&= \lim_{\lambda\to\infty}\oint\limits_{\tau\in(-\infty,\lambda]} f(\tau)\,\sigma^{-1}\left[g(\lambda-\tau)\right]\mu(\tau) \\
&= \lim_{\lambda\to\infty}\oint\limits_{\tau\in(-\infty,\lambda]} f(\tau)\left(\oint\limits_{\zeta\in(-\infty,\lambda-\tau]} g(\zeta)\,\mu(\zeta)\right)\mu(\tau) \\
&= \oint\limits_{\tau\in T} f(\tau)\left(\oint\limits_{\zeta\in T} g(\zeta)\,\mu(\zeta)\right)\mu(\tau) \\
&= \underbrace{\oint\limits_{\tau\in T} f(\tau)\,\mu(\tau)}_{A_f}.\underbrace{\oint\limits_{\zeta\in T} g(\zeta)\,\mu(\zeta)}_{A_g} = A_f.A_g
\end{aligned}
$$

Demostrándose de esta manera que el área generalizada de la convolución de dos señales es el producto de las áreas generalizadas de las respectivas señales. ■

References

[1] Roberts, M.J., "Señales y Sistemas". McGraw-Hill Interamericana, México DF, México, 2005.

[2] Kamen, E.W y B.S. Heck, "Fundamentos de Señales y Sistemas. Usando la Web y Matlab". Tercera Edición. Pearson, Prentice Hall. México DF, México, 2008.

[3] Kolmogorov, A.N. y S.V. Fomin, "Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional". Editorial MIR, Moscú, Rusia, 1975.

[4] Liu, C.L. y J.W.S. Liu, "Linear Systems Analysis". McGraw-Hill, New York, USA, 1975.